www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MATHÉMATIQUES ET MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Option TB

Durée de l'épreuve : 4 heures

Le but du problème est la détermination et l'étude, dans deux cas particuliers, d'une approximation polynômiale d'une fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ par les polynômes d'interpolation de Lagrange.

Dans tout ce problème :

- n est un entier naturel non nul.
- $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
  On confond polynôme et fonction polynôme.
- a et b sont deux nombres réels tels que : $a<b$.
- $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont n+1 réels distincts tels que : $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$.

A. Etude générale : construction des polynômes d'interpolation et convergence.

On note, pour $0 \leq i \leq n$: $\pi_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (X-x_k)$ et $L_i(X) = \dfrac{\pi_i(X)}{\pi_i(x_i)}$

1° a. Calculer $L_i(x_j)$ pour $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq n$.

b. Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c. Si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ quelles sont ses coordonnées dans la base $\mathcal{L}$?

Soit f une fonction définie sur le segment [a,b], le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f relatif à $x_0, \ldots, x_n$ est :

$$P_n(X) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, L_i(X)$$

Nous allons étudier la convergence de la suite de fonctions (P_n) dans deux cas particuliers.

2° Premier exemple : f est de classe C^∞ sur [a,b] et toutes les dérivées de f sont bornées sur [a,b] par une même constante réelle M.
(c'est à dire : $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [a,b]$, $|f^{(k)}(x)| \leq M$)

On étudie la différence $f(x)-P_n(x)$.

a. Que vaut cette différence en x_i, $0 \leq i \leq n$?

b. Soit x un réel fixé du segment [a,b] différent de tous les x_i, on note ϕ la fonction, de la variable u, de [a,b] dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\phi(u) = f(u) - P_n(u) - \frac{f(x) - P_n(x)}{q_n(x)}\, q_n(u)$$

où q_n est le polynôme défini par : $q_n(X) = \prod_{k=0}^{n} (X-x_k)$

En utilisant le théorème de Rolle (plusieurs fois) montrer qu'il existe un réel v du segment [a,b] tel que :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(v)}{(n+1)!}\, q_n(x)$$

où $f^{(n+1)}$ est la dérivée n+1-ième de f.

Tournez la page S.V.P.

c. Pour chaque entier naturel n on choisit arbitrairement les n+1 réels $x_0 < .. < x_n$ et on définit ainsi une suite de fonctions polynômes (P_n).

Déduire de la question précédente que lorsque toutes les dérivées de f sont bornées par une même constante réelle M la suite de fonctions (P_n) converge uniformément vers f sur [a,b].

3° Deuxième exemple : Dans cette question f est la fonction définie sur le segment [-1,1] par :

$$f(x) = |x|$$

et pour tout entier i compris entre 0 et n on pose :

$$x_i = -1 + \frac{2\,i}{n+1}$$

a. Calcul préliminaire.

p et q étant des entiers naturels tels que $0 \leq p < q$, montrer :

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_q^k \frac{q-2k-1}{k+1} = 1 + (-1)^p C_{q-1}^p \frac{q-2p-2}{p+1}$$

m désignant la partie entière de $\frac{n-1}{2}$ on pose :

$$A(n) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_n^k \frac{n-2k-1}{k+1} \quad \text{et} \quad B(n) = \sum_{k=m+1}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{n-2k-1}{k+1}$$

b. Montrer que : $P_n(1) = A(n) - B(n)$

c. Calculer $A(n) + B(n)$ et en déduire $P_n(1)$ en fonction de n et m.

d. Calculer $P_n(1)$ lorsque n est pair.

e. Calculer $P_n(1)$ lorsque n est impair.

Donner un équivalent de $|f(1) - P_n(1)|$ en plus l'infini en utilisant la formule de Stirling :

lorsque p tend vers $+\infty$ p! est équivalent à $\left(\frac{p}{e}\right)^p \sqrt{2\pi p}$

f. En déduire que la suite de fonctions (P_n) n'est pas simplement convergente sur [-1,1].

B. Détermination des fonctions P_n.

On propose deux algorithmes permettant le calcul des polynômes P_n.

Lorsque l'on demande de compter le nombre d'opérations nécessaires pour un algorithme il s'agit uniquement des opérations entre nombres réels. On ne tiendra pas compte des opérations et des tests sur les entiers utilisés comme indice dans les boucles.

Tournez la page S.V.P.

1°. Premier algorithme.

Pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq n$ on pose $a_i = \dfrac{f(x_i)}{\pi_i(x_i)}$.

ainsi : $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \pi_i(x)$

a, Ecrire un algorithme permettant de calculer les coefficients a_i. Compter le nombre d'opérations.

b. Ecrire un algorithme permettant de calculer alors $P_n(x)$, le réel x étant donné.
Compter le nombre d'opérations nécessaires pour ce calcul.

2°. Deuxième algorithme.

On définit les polynômes Q_i par :

$$Q_0(X) = 1 \quad \text{et pour} \quad 1 \leq i \leq n \quad : \quad Q_i(X) = \prod_{k=0}^{i-1} (X - x_k)$$

a. Montrer que $(Q_0,\ldots,Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Le polynôme P_n s'écrit alors : $P_n(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i Q_i(X)$

Pour $0 \leq p \leq q \leq n$ on note $P_{p,q}$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f relatif aux points $x_p,\ldots,x_q$ et $b_{p,q}$ le coefficient de son terme de degré q-p.

b. Expliciter $P_{p,p}$ et $b_{p,p}$ pour $0 \leq p \leq n$.

c. Pour $0 \leq p < q \leq n$ montrer que :

$$P_{p,q}(X) = \frac{(X-x_p)\,P_{p+1,q}(X) - (X-x_q)\,P_{p,q-1}(X)}{x_q - x_p}$$

en déduire : $b_{p,q} = \dfrac{b_{p+1,q} - b_{p,q-1}}{x_q - x_p}$

d. En remarquant que $P_n = P_{0,n}$ montrer que $b_i = b_{0,i}$ pour tout i, $0 \leq i \leq n$.

e. Donner un algorithme permettant de calculer les coefficients b_i. Compter le nombre d'opérations.

f. Ecrire un algorithme permettant de calculer alors $P_n(x)$, le réel x étant donné. (On s'inspirera de l'algorithme de Hörner).

Compter le nombre d'opérations nécessaires pour ce calcul.

* *

*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail